Existența. Epistemologie și Ontologie

Deschizi această carte și te întrebi ce vei găsi în paginile ei. Dar ești pregătit pentru cunoașterea ce se ascunde aici? Este o întrebare care te provoacă încă de la început să te deschizi spre adevărata cunoaștere. Această carte nu îți va oferi răspunsurile ultime, dar îți va deschide mintea spre o lume cu mult mai largă față de ceea ce este popularizat în mod normal în ziua de azi. Știința a adus într-adevăr lumină în multe dintre misterele lumii. Dar la fel de adevarat este că propriul succes a îndepărtat-o de unele dintre problemele rămase încă nerezolvate, ba chiar a făcut-o să aiba deja păreri formate în domenii care însă nu sunt încă sub jurisdicția ei. Pe parcursul acestei cărți vom insista în repetate rânduri pe recunoașterea celor ce sunt defapt cunoscute de către știință și vom evidenția domeniile existenței asupra cărora lumina științei încă nu a pătruns. Dar înainte de toate, psihologia cititorului trebuie clarificată, deoarece din păcate spiritul uman este frământat de prea multe tenebre care nu fac decât să întunece judecata. Iar cum doar un spirit sincer poate beneficia pe deplin de resursele pe care această carte le pune la dispoziție, cititorul trebuie să obțină sinceritatea necesară înainte de a se putea îmbarca la citirea acestei cărți. Sinceritatea ar părea ceva de la sine înțeles, pe care orice cititor consideră că o deține deja. Dar realitatea este cu totul alta. Sunt multe mecanisme care conlucreaza și încețoșează viziunea despre lume. Este nevoie ca aceste mecanisme să fie înțelese pentru a putea căpăta imunitate pe viitor și a putea recunoaște mai ușor adevărul atunci când acesta este întâlnit. Aceste mecanisme derivă din natura noastră evoluționistă. Cum în trecut apartenența la un trib era de o importanță capitală pentru supraviețuirea individului, natura a sădit în noi mecanisme prin care să ne putem integra într-un grup și astfel să ne creștem șansele de supraviețuire. Acesta din perspectiva evoluționistă este un lucru bun, dar care în momentul în care ai de făcut o alegere între adevăr și ideologia unui grup, îngreunează alegerea și favorizează alegerea ideologiei în locul adevărului. Ideologiile sunt practic mecanisme prin care un grup ajunge la o anumită omogenitate socială și culturală. Orice membru al grupului adoptă în mod instinctual ideologiile grupului pentru a fi accesptat în cadrul lui și astfel pentru a își crește șansele de supraviețuire. Mecanismul funcționa de minune în timpurile preistorice când oamenii trăiau în triburi și orice alungare din trib echivala cu moartea, supraviețuirea individuală în sălbăticie fiind fatală membrului exclus. Iar cum acest lucru nu era de dorit, membrul se adapta la cerințele tribului, adoptând fără curaj de contestare a regulilor nescrise ale tribului, chiar dacă acestea erau simple superstiții sau obiceiuri deloc morale, cum ar fi sacrificiile umane aduse zeilor. Cum acest mecanism s-a arătat benefic supraviețuirii tribului și al indivizilor componenți în fața vitreginiciilor naturii, acesta a prins rădăcini adânci în psihologia umană astfel încât îl purtăm în noi și în ziua de azi, chiar dacă motivațiile care i-au determinat apariția nu mai sunt atât de stringente în ziua de azi sau chiar nu mai există deloc. Prin urmare, deși astăzi suntem liberi să urmăm calea adevărului fără să ne temem că un leu ar putea sări din tufiș la noi, totuși nu o facem, și preferăm în continuare adoptarea de ideologii fără a le supune scrutinului rațiunii. Datorită acestor mecanisme imprimate în noi, ne este foarte greu să distingem adevărul într-o carte ce are curajul de a îl aborda. La contactul cu o astfel de carte, ideologiile înscrise în noi de către cultura din care facem parte, se vor revolta și vor respinge pe negândite cartea ce aduce adevărul, în favoarea ideologiilor false ale societății din care facem parte. Una din ideologiile societății contemporane este chiar știința. Un simplu exemplu de ideologie este existența atomilor. Orice om educat care a auzit despre atomi, a adoptat ideea existenței lor în mod automat, fără a considera vreo clipă că aceasta poate să fie o simplă idee nedemonstrată. Se merge pe credința că oamenii de știință știu ce fac, iar daca ei spun ceva, atunci așa trebuie să fie. Dar nu este decât o simplă ideologie adoptată fără prea multă gândire critică, astfel încât la întâlnirea unei cărți care dorește înlăturarea tuturor acestor ideologii, mecanismul arhaic de apartenență tribală va intra pe nebăgare de seamă în funcțiune și îl va face pe cititor să respingă o astfel de carte, fără să își dea seama nici măcar el de ce anume respinge. Dar evoluția din noi știe mai bine de ce face lucrul acesta. Deoarece din tufișul din afara tribului pândește leul, și e cu mult mai bine adoptarea ideologiilor tribului, oricât de greșite ar fi acestea, decât înfruntarea de unul singur cu leul.

Făcând astfel cunoscut cititorului mecanismele care îi conduc din umbră judecata, cititorul este astfel pregătit de parcurgerea acestei cărți. În caz că explicația acestor mecanisme este abia acum întâlnită pentru prima dată, în mod evident cititorului îi va fi greu să se elibereze de ideologiile în care a crescut o viață întreagă. Dar tocmai la acest demers se înrolează această carte. Tot ce este necesar din partea cititorului este sinceritatea. Apoi greul va fi preluat de această carte. Având aceste lucruri stabilite, ne putem acum îndrepta atenția și spre subiectul acestei cărți. Cum și titlul sugerează, este o carte care va încerca să ofere o viziune de ansamblu asupra tuturor lucrurilor care există. Pentru aceasta, va porni în mod onest cu descoperirile fizicii până în ziua de azi, iar apoi dupa ce viziunea contemporană despre lume a fost așternută, va porni cu mult curaj dincolo de aceasta și va arăta unde anume știința actuală își are lacunele și unde atenția acesteia trebuie să fie îndreptată în viitor. În acest demers de înfruntare a necunoscutului, multe lucruri în neregulă cu știința actuală vor ieși la iveală, încât în cele din urmă, știința actuală va părea ca un simplu mit de evul mediu față de felul în care potențial realitatea poate fi. Cititorul va ajunge să se mire cum știința actuală poate ține atât de mult la ideologia materialismului, când defapt realitatea se va dovedi cu totul alta. Dar acesta va fi unul din lucrurile pozitive pe care această carte le poate face! Daca cititorul într-adevăr va ajunge la concluzia că știința actuală este un simplu mit, aceasta va deschide calea către știința viitorului, o știință cu un pas mai aproape de aflarea adevărului.

Deși o carte de nivel de popularizare, prezentarea fizicii actuale se va face cât mai riguros cu putință. De aceea, un aparat matematic la nivel de liceu este necesar pentru înțelegerea întregului material prezentat aici. În sprijinul înțelegerii materialului prezentat, un capitol inițial de analiză matematică va introduce conceptele de derivată și integrală pe înțelesul tuturor. Apoi, nici fizica prezentată nu va intra în detalii obositoare. Se va menține doar la un nivel de prezentare de amsamblu a cunoașterii dobândite de fizica actuală, și va încerca să fie prezentată cât mai ușor cu putință, astfel încât și un elev de liceu să devină familiar cu fizica de nivel universitar. Fizica tinde să sperie cititorul prin faptul că deschiderea unei cărți din domeniu, îl pune pe acesta în față cu sute de fomule complicate. Dar toate acele formule sunt doar calcule de detaliu pentru probleme inutil de particulare. Modul în care fizica va fi prezentată aici este la nivel de fenomen general, suficient cât să îi ofere cititorului o viziune generală despre ce este vorba în respectivul domeniu. Vor fi de asemenea incluse și cazuri particulare elementare, pentru simplă ilustrare a funcționării acelor principii în practică, dar exemplele alese vor fi dintre cele mai simple, tocmai pentru încurajarea citirii lor în întregime și obținerea astfel a unei mai bune aprecieri a subiectului tratat.

După ce toate capitolele principale ale fizicii vor fi prezentate, expunerea de față va intra în tratarea conștiinței. Deși pentru urmărirea materialului despre fizică va fi suficientă înțelegerea matematicii prezentate, pentru urmărirea materialului despre conștiință dificultățile vor fi de o cu totul alta natură. Acestea vor izvorî din modul de a gândi pe care omul contemporan și l-a format prin creșterea într-o societate în care ideologia materialistă este ideologia principală. Voi încerca să limpezesc aceste dificultăți pe cât de bine sunt în stare. Ceea ce va fi nevoie din partea cititorului este parcurgerea sinceră a materialului prezentat și atenția la detalii. Este des întâlnit ca deși o frază să pară un simplu truism, în spatele ei să se ascundă defapt lucruri mult mai profunde atunci când îi este acordată atenția necesară. De aceea este foarte important ca materialul să fie parcurs cu atenție pentru a putea căpăta aprecierea necesară a subiectului tratat. Cum natura conștiinței contrastează puternic cu viziunea despre lume pe care o pune la dispoziție materialismul, dificultățile de înțelegere a conștiinței sunt posibil să apară la fiecare pas, oricât de simple ar fi lucrurile defapt atunci când sunt privite din perspectiva corectă.

Mergând mai departe la cuvintele din titlu, observăm doi termeni tare ciudați. Ce-or fi alea epistemologie și ontologie ? Pe scurt, epistemologia se referă la cunoaștere, iar ontologia se referă la existență. Materialul prezentat în această carte va încerca să fie mereu încadrat în cele două categorii. Motivul este confuzia care se găsește la ora actuală printre oamenii de știință. Deși ei tot ce fac este epistemologie, au greșita impresie că se ocupă cu ontologia. Tot ce face știința este să ne ofere cunoaștere despre lumea din jur. Dar această cunoaștere nu se identifică cu însăși lucrurile despre care este în legătură. Când spunem: ”Atomul

este format din protoni, neutroni și electroni.”, această afirmație este o afirmație epistemică. Este doar o încercare de a noastră de a descrie realitatea. Dar asta nu înseamnă că în realitate, adică la nivel ontologic, atomii chiar există în modul în care îi descrie știința. Orice ar fi acolo, în niciun caz nu sunt protoni, neutroni și electroni. Ci sunt elemente de realitate, inaccesbile nouă în mod direct. În mod fatalist, putem lejer să concluzionăm că lumea fizică ne este fundamental inaccesibilă. Tot ce putem face este să oferim descrieri despre ea, dar niciodată nu îi vom putea avea natura-i adevărată. Tot ce avem despre lumea fizică este epistemologia. Ontologia ei ne este inaccesibilă. Din păcate, omul de știință comun al zilelor noastre nu face distincția dintre cele două noțiuni, el crezând că teoriile lui sunt ontologie pură. În acest moment, cititorul se poate întreba ce rost mai are atunci să discutăm despre ontologie, dacă aceasta ne este pentru totdeauna inaccesibilă. Motivul este că o parte din ontologie ne este defapt în mod direct accesibilă. Și aceasta este conștiința. Conștiința este practic ontologie în acțiune. Toate culorile, sunetele, sentimentele, gândurile, pe care le avem sunt realitate pură, realitate pe care o experimentăm în mod direct. Partea interesantă aici este că deși avem parte de ontologie în mod direct, n-avem nicio idee de vreo explicație pentru conștiință. În cazul conștiinței avem ontologie, dar nu deținem nicio epistemologie prin care să explicăm stările pe care le trăim. Acesta este unul din marile contraste dintre lumea pe care ne-o prezintă fizica și lumea pe care o experimentăm în mod direct în conștiința noastră.

Vom avea multe de spus pe parcursul acestei cărți despre epistemologie și ontologie și sper că astfel la sfârșitul ei, cititorul va căpăta modul corect de a privi lumea și de a înțelege care trebuie să fie defapt demersul științei de a o explica. Din păcate, instituțiile de învățământ sunt prea focusate pe îndoctrinarea elevilor și studenților decât pe clarificarea noțiunilor care sunt predate. Un student la fizică este copleșit de teorii, ecuații și rezolvări de probleme, încât timpul nu îi mai permite să se întrebe ce sunt toate lucrurile pe care le are de învățat. Această stare de fapt a lucrurilor duce la crearea de persoane numai bune să recite pe de rost o multitudine de noțiuni aleatorii impuse asupra lor de către sistemul de învățământ, în locul creării de persoane lucide cu spirit critic care să fie în stare să înțeleagă exact care sunt problemele adevărate pe care le are de înfruntat știința. Studenții ies astfel din facultăți entuziasmați să explice materia întunecată și energia întunecată, deși nici măcar nu au habar ce sunt acele lucruri pe care încearcă să le explice și dacă măcar modul prin care acele fenomene pot fi explicate este modul clasic al punerii a toate cele sub forma ecuațiilor. Această grabă și îndoctrinare începătoșează marele mister al fizicii, al naturii, care este cu noi de când a deschis prima ființă ochii in acest univers: conștiința. În mod trist, conștiința nici nu există ca și cuvânt in vocabularul unui absolvent de fizică. Cel mai mare mister al universului, fenomenul pe baza căruia însăși știința există, dar oamenii care ar trebui să rezolve acest mister sunt total inconștienți că acesta măcar există. De aceea, această carte se va dovedi un adevărat izvor de lumină pentru scoaterea în evidență a adevăratelor fenomene care cer o explicație și spre trezirea la viață a tuturor celor interesați de știință. Aceștia vor avea bucuria să afle că cel mai mare mister din lume nu stă în adâncurile cosmosului și nici în interiorul atomului, ci stă în fiecare dintre noi. Noi suntem cel mai mare mister al universului. Și e timpul să ne ridicăm deasupra îndoctrinării materialiste și să găsim o explicație pentru noi înșine.

Scopurile cărții fiind astfel prezentate, e timpul să începem călătoria spre înțelegerea lumii și spre înțelegerea noastră. O vom lua pas cu pas, de la noțiuni care sunt în spiritul viziunii actuale despre lume pe care ne-o furnizează știința actuală, apoi ușor ușor vom aborda și marele mister al conștiinței. Cum pentru a înțelege bine fizica avem nevoie de o înțelegere corespunzătoare a matematicii, să începem așadar cu o prezentare a analizei matematice.

Analiză matematică

Ți-ai luat pixul și hârtia ? Ești pregătit să scrii ecuații matematice ? Ce ar fi totuși să nu fim așa grăbiți și presați cum suntem în școală ? Suntem aici pentru a înțelege Existența, nu pentru a face matematică. Așa că înainte de a trece la tratarea standard a matematicii, să ne oprim un pic și să reflectăm la ce anume facem. ”Matematică facem!” Oare ? Cum putem spune că facem matematică dacă nici măcar nu știm ce-i aceea

matematică ? Da, avem o înțelegere intuitivă asupra ei. Dar totuși... ce este matematica ? Când scriem 1+1=2, de unde știm asta ? De unde știm ce este acela ”1” ? De unde știm ce este acela ”2” ? De unde știm ce este aceea adunare ? De unde știm că daca adunăm 1 și cu 1 obținem 2 ? Ești surprins de aceste întrebări ? Crezi că sunt puse în glumă ? Și nu, răspunsul dat de ideologia curentă cum că noțiunea de ”1” o luăm din natură, spre exemplu din nevoia ciobanilor din trecut de a ține socoteala oilor, nu este cel corect. Acela este doar un răspuns superficial. Dar ceea ce întrebăm aici este mult mai profund de atât. Întrebăm despre însăși abilitatea conștiinței de a avea aceste noțiuni. Ne lovim așadar de prima neconcordanță dintre ideologia ce ne este prezentată în școli și adevăratele probleme ale științei. În școală doar ”facem matematică” și atât. Da, ne pricepem de minune la matematică. Dar... totuși ce este acel lucru pe care îl numim matematică ? Și cum anume putem face așa ceva ? Răspunsul nu îl are nimeni. Cu toate acestea, voi încerca să ofer un răspuns, dar acesta va trebui să aștepte până abia dupa ce vom discuta serios despre conștiință. Până atunci, ai șansa să reflectezi singur la aceste întrebări. Și când va veni momentul să citești răspunsul, să îți compari propriile gânduri cu acel răspuns.

Acum că ne-am limpezit puțin judecata, ne putem apuca de ”făcut matematică”. Dar nu uita niciodată: pune totul sub semnul întrebării! Întreabă-te mereu ce este cutare și cutare lucru!

Dacă ai deja o înțelegere adecvată a analizei matematice, acest capitol poate fi sărit cu totul. Dar dacă ai anumite sentimente negative legate de matematica din liceu, nu te impancienta. Autorul acestei cărți a terminat liceul (cu medie bună încă!) fără să aibă vreo înțelegere a noțiunilor de derivată și integrală. Există două posibilități aici. Ori nivelul de inteligență al autorului este unul scăzut, ori modul în care matematica este predată în școli e de așa natură încât contează mai mult să fii bun la manipulat formule decât la înțeles defapt la ce se referă acele formule.

$$\int x^2 dx \, ?$$

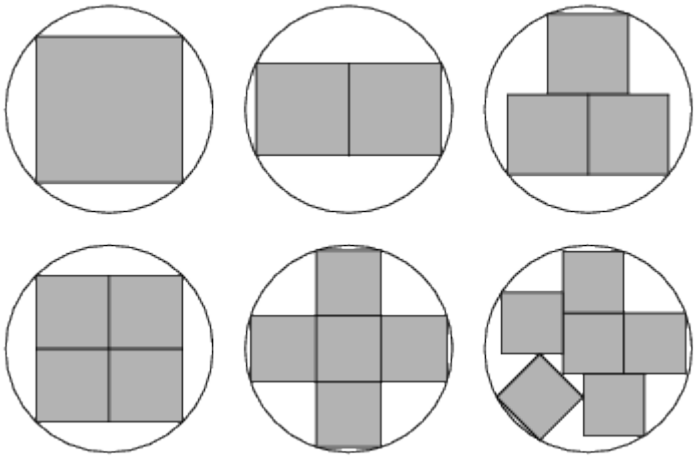
Nicio problemă. Știu exact rezultatul:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

A obține media 10 la matematică aplicând de zor astfel de formule a fost o nimica toată. Dar simbolul acela ciudat a continuat să rămână un mister până după terminarea liceului, când de unul singur parcurgând o carte de astrofizică, am ajuns la punctul în care se calcula radiația emisă de o stea. Fiind o problemă de geometrie în spațiu, erau folosite integrale triple. Și ia de înțelege ce anume se întâmplă acolo doar aplicând mecanic formule învățate pe de rost în liceu. Și mai ales stai și întreabă-te ce legătură are aria de sub grafic cu aplicarea integralelor în 3 dimensiuni. Liceul mă învățase cât se poate de clar: integrala e aria de sub grafic. Tot elevul o știa! Și evident, tot elevul se înșela... Să vedem deci ce sunt defapt aceste noțiuni de care analiza matematică face atâta uz.

Derivate

Analiza matematică a apărut din necesitatea de a lucra în calcule cu cantități infinitezimal de mici. Primele încercări au existat înca din antichitate, dar abia în secolul 17, Newton și cu Leibniz au dezvoltat în mod independent analiza matematică modernă. În antichitate se pusese problema calculul ariei unui cerc. Aria unui dreptunghi e ușor de calculat: doar înmulțești cele două laturi și obții aria. Dar cum faci lucrul acesta pentru obiecte de forme neobișnuite pentru care nu ai nicio formulă clară prin care să le calculezi aria ? Rezolvarea vine prin aproximarea formelor respective cu forme a căror arie știi să o calculezi. Astfel pentru un cerc putem avea următoarele situații în care înghesuim cât mai multe pătrate care să acopere cât mai mult din aria cercului și astfel să fim cât mai aproape de valoarea adevărată a acesteia.



Cu cât facem pătratele mai mici, cu atât acestea pot ocupa zonele mai înguste din cerc și astfel ne putem apropia tot mai mult de valoarea exactă a ariei cercului. În momentul în care pătrățelele devin infinitezimal de mici, suma ariei lor va egala aria cercului. Exemplul cu aria este doar unul din nenumăratele cazuri în care o anumită valoare poate fi aproximată prin o multitudine de valori infinitezimale. Vom vedea pe măsură ce vom prezenta fizica, tot mai multe cazuri în care va apărea nevoia de a aproxima o anumită mărime printr-o mulțime de alte mărimi mai mici.

Un alt caz în care nevoia de a lucra cu cantități infinitezimale apare este atunci când dorim să știm valoarea unei anumite mărimi la un punct foarte bine specificat. De exemplu, una dintre cele mai simple mărimi din fizică este viteza. Viteza este definita vag ca fiind distanța spațială pe care o parcurgi într-o anumită perioadă temporală. Dacă ai de mers 100km și îi parcurgi în să zicem 2ore, atunci poți spune în mod vag că ai mers cu o viteză de 50km/h. Dar valoarea aceasta a vitezei este bună doar dacă nu ești prea pretențios și te mulțumești să știi doar viteza medie cu care ai parcurs respectiva distanță. Dar dacă ești interesat de a afla viteza instantanee, lucrurile nu mai devin atât de simple. Să scriem mai întâi o formulă vagă a vitezei:

$$v = \frac{x}{t}$$

unde *v* este viteza medie pe tot spațiul *x*, *x* este tot spațiul parcurs, iar *t* este timpul necesar parcurgerii respectivului spațiu.

Dacă vrem să aflăm viteza mai precisă la un anumit punct, ceea ce vom face e să luăm distanțe mai mici de drum și să vedem în cât timp acestea sunt parcurse. În loc să calculăm viteza pentru 100km, o putem calcula pentru 100m. Astfel deși viteza medie este de 50km/h, aceasta va diferi atunci când o vom considera pentru porțiuni mai mici. Astfel pe o anumită anumită porțiune de 100m o putem parcurge în 7 secunde și atunci să avem o viteză pe porțiunea respectivă de 51.42km/h, sau să o parcurgem în 8 secunde și atunci să avem o viteză pe porțiunea respectivă de 45km/h. Putem nota aceste cazuri prin formula:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

unde *v* este viteza medie pe porțiunea de drum Δx, Δx este porțiunea de drum parcurs, iar Δt este intervalul temporal în care am parcurs respectiva porțiune de drum.

Dacă însă suntem pretențioși la maxim și dorim chiar viteza instantanee, adică viteza într-un moment de timp precis specificat, atunci ajungem la necesitatea introducerii analizei matematice, deoarece momentul de timp precis specificat este practic o mărime infinitezimală (adică infinit de mică). Mărimile infinitezimal de

mici se notează prin înlocuirea simbolului grecesc delta, Δ, prin simbolul latin, d. Vom avea astfel următoarea formulă pentru viteza instantanee:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

unde *v* este viteza instantanee, *dx* este distanța spațiala infinitezimală, iar *dt* este intervalul temporal infinitezimal în care respectiva distanță spațială este parcursă.

Dar aici întâmpinăm o problemă, deoarece spre deosebire de cazul precedent în care puteam specifica o anumită valoare pentru Δx, *dx* este o valoare infinitezimal de mică. Deci nu e 1m, nici 0,0001m, nici 0,000000000000000001m, ci e infinitezimală. Trebuie să găsim astfel o modalitate de a lucra cu ea dacă vrem să aflăm viteza instantanee. Ne întâlnim astfel cu noțiunea de **derivată**. În funcție de cât de precizi dorim să fim în exprimare, se pot da diferite definiții pentru derivată. Dar la modul intuitiv, derivata este raportul dintre două diferențiale, diferențialele fiind mărimile infinitezimale de care suntem interesați. În cazul vitezei, diferențialele sunt *dx* și *dt*. Definiția riguroasă din manualele de clasa a 11-a de matematică, este următoarea:

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D \cap D'$, unde D' este mulțimea punctelor de acumulare.

a) Funcția f **are derivată** în punctul x_0 dacă există limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x- x_0}$. Această limită se notează *f'*(x_0) și se numește derivata funcției *f* în punctul x_0.
b) Funția f **este derivabilă** în în punctul x_0 dacă există și este finită limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x- x_0}$.

Pe mine toate aceste notații mă speriau în liceu. Ce-or însemna toate acele simboluri ? Dar dacă te uiți atent, sunt doar reformularea acelorași lucruri despre care am discutat mai sus. Acea limită fioroasă nu înseamnă nimic altceva decât faptul că decizi să măsori viteza pentru intervale temporale din ce în ce mai mici. Un punct de acumulare este, informal vorbind, un punct de care te poti apropia oricât de mult dorești. În exemplul nostru cu viteza, putem să alegem ca punct de acumulare, ora 3 la prânz să zicem. Deci $x_0 = 3$. Dacă vrem să măsurăm viteza instantanee, trebuie să alegem intervalul temporal cât mai mic. De exemplu intre $x = 2{:}59{:}59$ și $x_0 = 3{:}00{:}00$. Sau între $x = 2{:}59{:}59{,}999999$ și $x_0 = 3{:}00{:}00$. Cu cât alegem x mai apropiat de x_0, intervalul $x - x_0$ devine tot mai mic până ajunge infinitezimal. Motivul pentru care putem aplica formula de mai sus timpului, este deoarece timpul este presupus a fi o mărime continuă, și astfel fiecare punct din timp este un punct de acumulare. Dacă timpul ar fi discret, această abordare nu ar mai funcționa, deoarece punctele lui ar deveni puncte izolate, și definiția limitei nu se aplică la puncte izolate.

Avem astfel o formulare riguroasă a derivatei. În cazul nostru, observăm că viteza (instantanee) este practic derivata spațiului în raport cu timpul. Dacă știm cum anume se modifică spațiul odată cu timpul, putem calcula o valoare a vitezei instantanee la orice moment temporal dorim. Să luăm un exemplu.

Să zicem că spațiul parcurs poate fi pus sub formula $f(t) = 7t$, unde *f(t)* este spațiul parcurs, iar t este timpul necesar parcurgerii acelui spațiu. Să lucrăm în sistemul internațional și să măsurăm spațiul în metri și timpul în secunde. Să zicem că dorim sa aflăm viteza la momentul $t_0 = 5s$. Vom aplica definiția derivatei:

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to 5} \frac{7t - 7t_0}{t - t_0} = 7 \lim_{t \to 5} \frac{t - t_0}{t - t_0} = 7m/s$$

Observăm că momentul temporal la care facem măsurătoarea este irelevant. Asta deoarece avem de a face cu mișcare rectilinie uniformă, asta înseamnând cu viteză constantă. Dar să luăm și un caz mai complicat. Să zicem ca spațiul parcurs poate fi pus sub formula $f(t) = 7t^2$. Vom avea:

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to 5} \frac{7t^2 - 7t_0^2}{t - t_0} = 7 \lim_{t \to 5} \frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = 7 \lim_{t \to 5} (t + t_0) = 7 \cdot (5 + 5) = 70m/s$$

Am căpătat astfel un instrument cu care putem calcula derivate. În practică însă, definiția derivatei este anevoioasă și în schimb se folosesc direct formule de calcul a diferitelor derivate. Să deducem două exemple de astfel de formule. Vom face deducerea în mod matematic, fără a mai vorbi de viteză, dar formulele deduse matematic pot fi ulterior aplicate oricăror situații din viața reală în care apare nevoia calculării de derivate, adică a raportului dintre două marimi infinitezimale.

1) Fie $f(x) = x^n$. Vom avea:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} = nx_0^{n-1}$$

Pe scurt, această formulă poate fi scrisă: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Acum că avem această formulă simplă, să repetăm calculul anterior pentru viteză să vedem dacă obținem același rezultat. Să luăm așadar iar cazul în care spațiul parcurs poate fi descris prin formula $f(t) = 7t^2$ și să calculăm viteza la momentul $t_0 = 5s$. Vom avea:

$$f'(t_0) = f'(5) = (7t^2)' = 7(t^2)' = 7(2t) = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70m/s$$

Același rezultat! Și mult mai simplu și mai rapid.

Înainte de a rezuma discuția despre derivate, să mai luăm un exemplu de deducere a unei formule de calcul prescurtat. Aceste formule se găsesc oricum listate în tabele, de unde pot fi folosite la nevoie.

2) Fie $f(x) = \sin(x)$. Vom avea:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(x_0 + t) - \sin(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(x_0 + \frac{t}{2}\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \cos\left(x_0 + \frac{t}{2}\right) = cosx_0$$

În ultimul pas am folosit formula din domeniul limitelor: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Pe scurt, derivata obținută poate fi scrisă: $(\sin x)' = \cos x$.

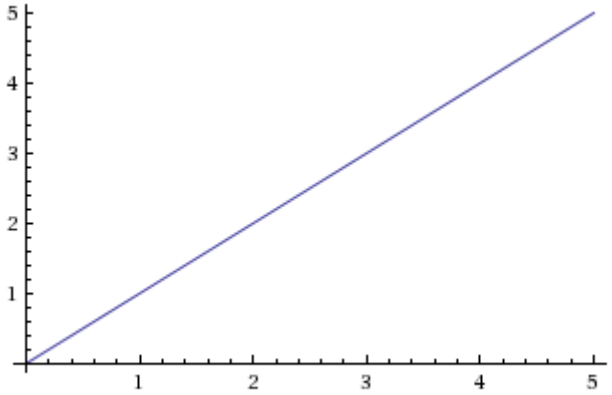
Să recapitulăm, pentru a avea grijă că nu ne rătăcim în această junglă matematică și să pierdem din vedere esența a ceea ce facem aici. Motivația introducerii derivatei este nevoia în practică de a calcula un raport între două marimi infinitezimal de mici. Am văzut cum funcționează această noțiune în cazul calculării vitezei la un moment temporal exact specificat. Dar derivata, și implicit toate formulele matematice corespunzătoare, se poate aplica oricând avem situația de a afla raportul a două marimi infinitezimale. De obicei fizica bazându-se pe evoluția temporala a unui sistem, derivatele în cazul ei vor fi mereu derivate în raport cu timpul. Un exemplu ar fi rata de curgere a unui râu, care se poate măsura în litri/secundă sau rata de transfer energetic măsurată în jouli/secundă, etc.

Să vedem acum o altă situație în care mărimile infinitezimale apar în practică.

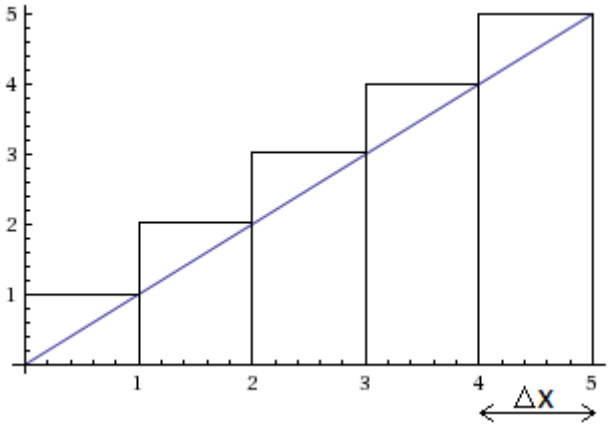
Integrale

A doua necesitate de a folosi mărimi infinitezimale a fost cea prezentată la începutul capitolului în care a fost pusă problema calculării ariei cercului. Soluția găsită a fost prin aproximarea ariei cercului prin figuri ale căror arii sunt cunoscute și apoi adunarea acelor arii și obținerea astfel a valorii ariei cercului. Să luăm un exemplu simplu al calculării ariei unui triunghi pentru a vedea exact locul în care ia naștere noțiunea de integrală. Vom începe cu acest exemplu de arie, deoarece este cel mai simplu de înțeles. Problema în liceu însă este că integralele sunt folosite exclusiv pentru calculul ariei de sub graficul unei funcții, astfel încât elevul ajunge să creadă că defapt aria de sub grafic e ceea ce o integrală este. Dar acela este doar un caz particular de ceea ce este defapt o integrală. Vom vedea prin prezentarea mai multor exemple ce este defapt aceasta.

Să luăm funcția $f(x) = x$.



Să zicem că dorim să calculăm aria triunghiului format de graficul acestei funcții și axa Ox, între valorile *x*=0 și *x*=5. Aria unui triunghi fiind $A = (baza \cdot înălțimea)/2$, vom avea $A = (5 \cdot 5)/2 = 12{,}5$. Să presupunem totuși că nu știm formula pentru aria unui triunghi, ci singura formulă de arie pe care o știm este aria unui dreptunghi. Cum putem afla aria triunghiului atunci ? Triunghiul nu arată deloc ca un dreptunghi. Deci cum ajungem de la unul la altul ? Ceea ce putem face este să aproximăm triunghiul printr-o serie de dreptunghiuri. Să zicem că alegem următoarea aproximare:

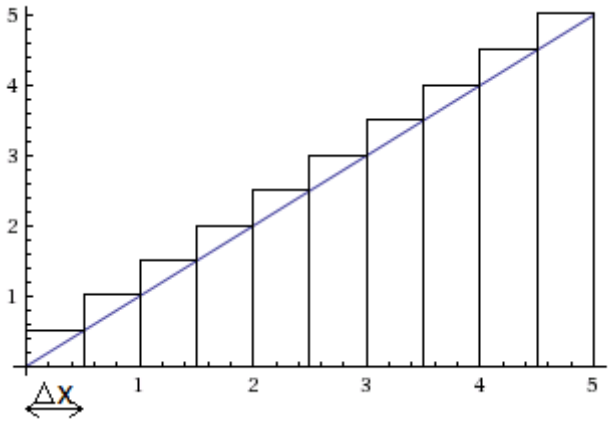


Fiecare dintre cele 5 dreptunghiuri au baza de lungime egală cu 1, și înălțimile cu valorile de 1,2,3,4,5. Vom aproxima astfel aria triunghiului prin suma ariilor celor 5 dreptunghiuri. Vom avea astfel aria aproximativă de $A = (1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (1 \cdot 3) + (1 \cdot 4) + (1 \cdot 5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Nu obținem chiar valoarea exactă, dar suntem destul de aproape. Am putea să obținem o valoare mai apropiată de cea reală ? Sigur. Tot

ce trebuie să facem e să aproximăm triunghiul folosind mai multe drepunghiuri. Înainte de a face asta, să scriem suma de mai sus folosind o notație riguroasă.

$$A = \sum_{\text{înălțime}=1}^{5} (\text{înălțime} \cdot \text{bază } dreptunghi) = \sum_{\text{înălțime}=1}^{5} (\text{înălțime} \cdot \Delta x)$$

Prin Δx am notat baza drepunghiurilor, așa cum este ilustrată și în figură. Deci ceea ce avem este o sumă de arii de drepunghiuri cu baza Δx și cu înălțimea crescând în pași de câte 1 între 1 și 5. Să aproximăm acum încă și mai bine.



De data aceasta având mai multe dreptunghiuri, și baza lor va fi mai mică. Am ales ca dreptunghiurile să aiba baza 0,5. Dacă le adunăm ariile, obținem

$$A = 0{,}5 \cdot (0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 3 + 3{,}5 + 4 + 4{,}5 + 5) = 13.75$$

Rezultatul este acum mai apropiat de valoarea reală! Scriind această arie în mod riguros, vom avea:

$$A = \sum_{\text{înălțime}=0{,}5}^{5} (\text{înălțime} \cdot \text{bază } dreptunghi) = \sum_{\text{înălțime}=0{,}5}^{5} (\text{înălțime} \cdot \Delta x)$$

Diferența fiind că acum înălțimea crește în pași de către 0,5 în loc de 1. Întrezărim astfel modul prin care se poate ajunge în cele din urmă la valoarea exactă a ariei triunghiului. Dacă vom folosi o infinitate de dreptunghiuri, obținem în cele din urmă rezultatul dorit. În același timp, pe măsură ce creștem numărul dreptunghiurilor, observăm și că baza lor scade. Până când ? Exact ca în discuția despre derivate, baza dreptunghiurilor va scădea până când baza lor va deveni infinitezimală și astfel Δx va deveni dx. În momentul în care Δx devine dx, și suma se va transforma într-o... integrală! Vom avea astfel formula:

$$A = \int_{\text{înălțime}=0}^{5} \text{înălțime} \cdot dx$$

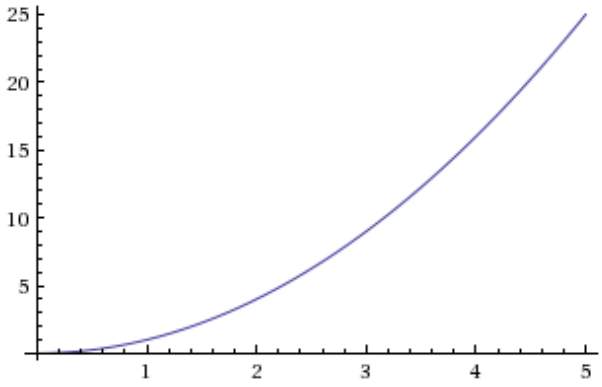
Acum se explică și de ce simbolul pentru integrală este un S alungit. Deoarece integrala nu e nimic altceva decât o sumă, diferența dintre o integrală și o sumă obișnuită fiind faptul ca integrala este o sumă de cantități infinitezimale. Iată-ne așadar înțelegând în câteva pagini esența analizei matematice pe care în liceu te străduiești să o înțelegi 2 ani, dar pe care la sfârșitul liceului te trezești că tot nu o știi și te întrebi ce sunt acele lucruri cu care ai rezolvat atâtea sute de exerciții. Derivata este un simplu raport de cantități infinitezimale iar integrala este o simplă sumă de cantități infinitezimale. Nimic mai simplu.

Vom trata în continuare câteva aplicații interesante ale integralelor, deducând misterioasele formule ale lungimii și ariei unui cerc și suprafeței și volumului unei sfere, pentru a căpăta o înțelegere mai profundă despre cum sunt folosite integralele în practică. În exemplul de mai sus, aproximarea folosind dreptunghiuri este cea mai simplă posibilă. Dar în alte cazuri, altele sunt aproximările mai potrivite de a fi făcute. Înainte de a trece efectiv la respectivele calcule, este nevoie să prezentăm teorema fundamentală a analizei matematice deoarece avem nevoie de ea pentru calcule practice.

Să punem mai întâi integrala de mai sus într-o formă matematică mai potrivită. Deoarece în practică este bine să se lucreze cu o singură variabilă, trebuie să exprimăm înălțimea ca o funcție de *x*. Cum putem face lucrul acesta? Dacă ne uităm cu atenție la ce se întâmplă cu înălțimea atunci când lățimea dreptunghiurilor tinde către *dx*, observăm că valoarea înălțimii se apropie de linia graficului exprimată prin *f(x)=x*. Vom avea astfel *înălțimea = f(x) = x*. Integrala va deveni astfel:

$$A = \int_{\text{înălțime}=0}^{5} \text{înălțime} \cdot dx = \int_{f(x)=0}^{5} f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{5} x\, dx$$

Să mai luăm un exemplu pentru a înțelege exact ce se întâmplă. Să luăm de data aceasta funcția $f(x) = x^2$ și să îi calculăm aria de sub grafic între limitele *x=0* și *x=5*.



Nu voi mai desena dreptunghiurile care aproximeaza aria, dar procedura va fi aceeași. Iar pe măsură ce lățimea dreptunghiurile aproximatoare se va apropia de *dx*, înălțimea acestora se va apropia de valoarea funcției exprimată prin $f(x) = x^2$. Vom avea astfel:

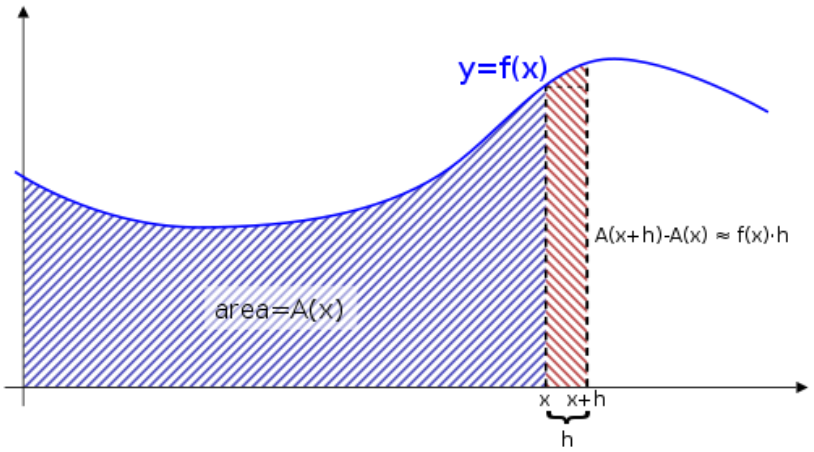
$$A = \int_{\text{înălțime}=0}^{25} \text{înălțime} \cdot dx = \int_{f(x)=0}^{25} f(x) \cdot dx = \int_{x^2=0}^{25} x^2\, dx = \int_{x=0}^{5} x^2\, dx$$

Deoarece vrem să exprimăm totul în funcție de *x*, am transformat astfel și limitele de integrare din limite pentru *înălțime* în limite pentru *x*.

Următorul pas este să găsim o modalitate de a evalua aceste integrale pentru a obține o valoare numerică a ariei de sub grafic. Pentru aceasta avem nevoie de Teorema fundamentală a analizei matematice.

Teorema fundamentală a analizei matematice

Deoarece demonstrația completă este destul de lungă, ne vom limita la a da doar o intuiție despre locul din care teorema derivă și care este esența acesteia. Să considerăm graficul următor în care avem aria de sub funcția *f(x)*:



Aria de la *0* la *x* o notăm cu *A(x)*, iar aria de la *0* la *x+h* o notăm cu *A(x+h)*. Dacă facem diferența dintre cele 2 arii, obținem:

$$A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$$

Acum vom aplica aceeași tehnică de a face intervalul h infinitezimal și obținem:

$$A(x+dh) - A(x) = f(x) \cdot dh$$

$$f(x) = \frac{A(x+dh) - A(x)}{dh} = A'(x)$$

Dar cum am văzut anterior, *A(x)* este chiar integrala funcției *f(x). A(x)* se mai numește și antiderivata funcției *f(x).* Observăm așadar că pentru a ajunge înapoi de la integrală la funcția originală, trebuie să derivăm integrala. Astfel, integrarea și derivarea sunt operații opuse. Avem astfel un mod intuitiv de a calcula integrale. Pentru a afla rezultatul unei integrale, trebuie să ne întrebăm "Ce funcție dacă am deriva-o, am obține funcția de sub integrală ?". Să vedem un exemplu pentru a ne lămuri ce înseamna asta.

Să luăm integrala care a apărut la începutul acestui capitol:

$$\int x^2 dx$$

Ceea ce trebuie să ne intrebăm acum este: "Ce funcție dacă am deriva-o, am obține x^2 ?" Funcția aceasta va fi $\frac{x^3}{3} + C$. Să verificăm că într-adevăr așa este:

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2$$

Într-adevăr obținem funcția de sub integrală. Concluzionăm astfel că:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

unde *C* este o constantă, derivata unei constante fiind egală cu *0* deoarece aplicând definiția derivatei avem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0$$

Prima parte a teoremei fundamentale a analizei matematice stabilește astfel că integrala este opusul derivatei. Partea a doua a teoremei ne oferă o modalitate de calcul numeric a valorii unei integrale atunci când aceasta este luată între 2 limite numerice. Ne vom limita aici doar la a specifica această formulă fara demonstrație:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

unde *F(x)* este antiderivata funcției *f(x).*

Să aplicăm acest rezultat ariei de sub triunghiul format de funcția *f(x)=x* și să ne convingem în sfârșit că integralele funcționează:

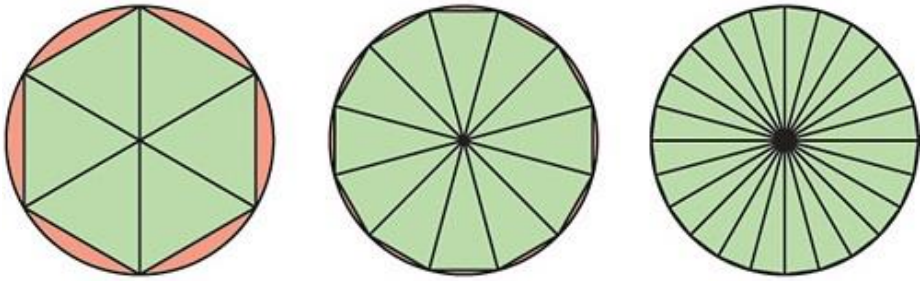
$$A = \int_{\text{înălțime}=0}^{5} \text{înălțime} \cdot dx = \int_{f(x)=0}^{5} f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{5} x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 12{,}5$$

Obținem în cele din urmă rezultatul așteptat! Suntem astfel în posesia întregului aparat matematic al analizei matematice de care avem nevoie pentru a înțelege toată fizca din această carte. Evident, prezentarea analizei matematice făcută aici este doar o prezentare conceptuală. Aceasta în niciun caz nu va înlocui abilitățile de calcul care se dobândesc în 2 ani de studiu în timpul liceului. De exemplu, în calculul anterior am trecut brusc de la integrala lui x la rezultatul $\frac{x^2}{2}$. Acesta este unul din multele rezultate pe care elevul de liceu ajunge să le învețe mult prea bine. Nu ne vom ocupa aici de deducerea tuturor acestor rezultate.

Acum că știm cum funcționează conceptual aparatul matematic al analizei matematice, să mai vedem câteva cazuri în care să insistăm pe esența analizei matematice, și nu pe aparatul acesteia de calcul.

Cercuri și sfere

Să ne propunem așadar să calculăm aria unui disc de cerc. Formula πR^2 este cunoscută încă din școala generală, dar de unde vine această formulă? Dându-se un disc de cerc, cum anume îi putem calcula aria? În spiritul acestui capitol, propunerea cea mai evidentă de atacare a problemei este prin aproximarea ariei discului cercului cu figuri ale căror arie știm să o calculăm. Dar aici intervine o problemă. Prima propunere de soluție ar părea aproximarea prin dreptunghiuri, la fel cum am făcut și în exemplele de mai sus. Dar dificultatea în a folosi dreptunghiuri pentru aproximarea ariei este stabilirea limitelor între care să se facă integrarea. În exemplul de mai sus, limitele alese au fost 0 și 5. Ar fi putut să fie oricare alte limite, 0 și 1 de exemplu, procedura ar fi fost aceeași. Dar dacă vrem să facem același lucru pentru aproximarea ariei discului cercului, ce limite de integrare alegem? Nu e deloc ceva evident. Și asta deoarece forma cercului nu este liniară să poți să așezi dreptunghiurile frumos unul lângă altul și doar să le modifici înălțimea. Prin urmare, cum aranjezi dreptunghiurile într-un cerc astfel încât să poți calcula o integrală a lor? Problema fiind suspicios de dificilă, să alegem altă figură prin care să aproximăm aria discului cercului. Să alegem de exemplu triunghiuri. La prima vedere ar părea încă și mai dificilă folosirea triunghiurilor. Nu și dacă așezăm triunghiurile în modul următor:



Ce bine! Ce elegant am reușit să aproximăm aria unui disc de cerc prin arii de triunghiuri. Acum următorul pas. Om fi aranjat noi frumos triunghiurile, dar cum scriem integrala? Aducându-ne aminte cazul anterior cu dreptunghiurile, ceea ce făceam era să luăm aria dreptunghiurilor și să o integrăm între anumite limite. În acest caz, aria triunghiurilor va fi:

$$A_{\Delta} = \frac{\hat{\imath}n\check{a}l\c{t}imea \cdot baza}{2} = \frac{R \cdot dt}{2}$$

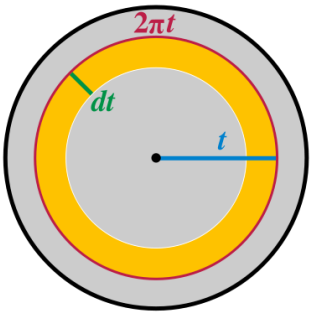
unde R este raza cercului, care după câte se observă este și înălțimea triunghiurilor, iar dt este baza infinitezimală a triunghiurilor.

Acum trebuie să stabilim și limitele între care să intregrăm această bază. Uitându-ne la figură, observăm că baza triunghiurilor se dispune de-a lungul cercului, deci vor parcurge o lungime egală cu lungimea cercului, $2\pi R$. Avem astfel integrala pentru aria discului cercului:

$$A = \int_0^{2\pi R} \frac{R}{2} dt = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi R} dt = \frac{R}{2} t|_0^{2\pi R} = \frac{R}{2} 2\pi R = \pi R^2$$

Obținem așadar misterioasa formulă a ariei discului cercului pe care o știam dintotdeauna, fără a ști însă cum era obținută. Să mai vedem un mod prin care putem calcula aria discului cercului, pentru a căpăta o intuiție încă și mai bună asupra analizei matematice.

Folosirea de triunghiuri pentru a aproxima aria discului cercului a fost într-adevăr o idee tare isteață și creativă. Dar este singura posibilă? În niciun caz. Fiecare poate veni cu propriile lui idei de a găsi elemente infinitezimale care adunate să aproximeze aria discului cercului. Să ne uităm iar la discul de cerc și să ne întrebăm ce alte moduri ingenioase de aproximare a ariei acestuia putem găsi? Dacă am aproxima aria acestuia prin sectoare circulare din ce în ce mai mici a căror grosime să o facem pe urmă infinitezimală? Pare a fi o idee bună. Să vedem ce obținem.



În cazul acesta vom fi interesați de a integra ariile sectoarelor circulare. Dar care este aria acestora? Dacă ne uităm bine la ce se întâmplă atunci când grosimea lor devine tot mai subțire, vedem că forma acestora devine dreptunghiulară. Ne putem imagina cum luăm un astfel de sector și îl desfășurăm. Forma obținută va fi aceea a unui dreptunghi. Dar care vor fi lungimea și înălțimea acestor dreptunghiuri? Lungimea acestora fiind de-a lungul unui cerc, va fi $2\pi t$, iar înălțimea va fi cea care va fi infinitezimală de data aceasta, și o vom nota cu *dt.* Acum că am stabilit care vor fi elementele infinitezimale pe care le integrăm, să ne gândim și la limitele între care le integrăm. Aceste sectoare circulare vor începe din centrul discului și se vor termina la marginea discului, deci le vom integra între 0 și raza cercului, R. Să vedem integrala pe care o obținem:

$$A = \int_0^R 2\pi t dt = 2\pi \int_0^R t dt = 2\pi \frac{t^2}{2}\Big|_0^R = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Încă o dată formula corectă!